

CAPÍTULO 9

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

9.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Para interpretar geoméricamente el concepto de la derivada, debe recordarse primeramente su definición, así como el significado de un límite:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que equivale a la pregunta ¿hacia dónde se acerca el valor del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bajo la condición de que el incremento de x se esté aproximando a cero?

Luego debe entenderse la figura 9.1. En ella, $f(x)$ representa la gráfica de cualquier función (de hecho, la que se está derivando). Sobre esa curva hay dos puntos: un punto **P** por el que pasa la recta tangente **T** a la curva y otro punto **Q** por el que pasa la secante **S**.

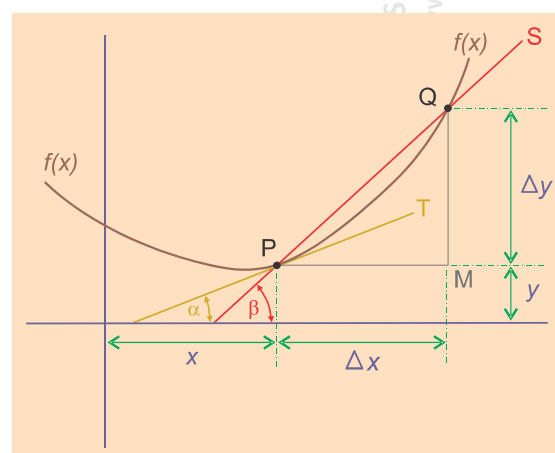


figura 9.1

La recta tangente **T** forma un ángulo α con el eje x mientras que la secante **S** forma un ángulo β . Obsérvese que las coordenadas del punto P son $P(x,y)$. Además, el ángulo $\angle QPM$ es igual al ángulo β . Por lo tanto, en el triángulo QPM se tiene que

$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \right)$$

Es necesaria una aclaración: En el idioma Español, como en muchos otros, las palabras suelen tener más de un significado. Por ejemplo, la palabra *clase* tiene el significado del sitio en donde se imparten cátedras; pero también se emplea para denotar clasificación en Biología, los seres vivos pertenecen a una clase, a un orden, a una familia, a un género y a una especie. También se utiliza la palabra *clase* para denotar categoría o distinción, cuando se habla de una persona con clase.

Es el caso particular de la palabra *tangente*, que en esta explicación de la interpretación de la derivada se empleará con dos significados diferentes, por lo que el estudiante debe estar alerta para interpretar correctamente dicha palabra cada vez que aparezca. La palabra *tangente* tiene un **significado trigonométrico** que quiere decir el cateto opuesto entre el cateto adyacente; por otra parte, tiene un **significado geométrico** y se utiliza para denotar la recta o curva que toca en un solo punto a otra curva. Se distinguen, entre otras cosas, porque la tangente trigonométrica se abrevia *tan* y además tiene argumento, por ejemplo, $\tan 23$, mientras que la tangente geométrica no se abrevia y no tiene argumento.

En la figura 9.1, la recta **T** es la tangente (geométrica) a la curva $y = f(x)$, mientras que el cociente de los incrementos al que se refiere la definición de la derivada $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la tangente trigonométrica del ángulo β .

La definición de la derivada exige que el incremento de x tienda a cero ($\Delta x \rightarrow 0$). Entonces observando la figura 9.1 se ve que si el punto **Q** se mueve sobre la curva aproximándose al punto **P**, lo que se consigue simultáneamente es que

- La recta secante **S** se aproxime a la recta tangente **T**.
- El ángulo β se acerca al ángulo α .
- El incremento de x tiende a cero ($\Delta x \rightarrow 0$).

Recordando de la Geometría Analítica que la pendiente m de una recta es la tangente (trigonométrica) del ángulo que forma dicha recta con la horizontal, en la figura 9.1, la pendiente de la recta tangente (geométrica) T es $m_T = \tan \alpha$, mientras que la pendiente de la secante es

$$m_s = \tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y como cuando $\Delta x \rightarrow 0$ el ángulo β tiende al ángulo α , necesariamente la pendiente de la secante S se aproxima a la pendiente de la tangente T , o lo que es lo mismo, $\tan \beta \rightarrow \tan \alpha$, finalmente se concluye que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_T = \tan \alpha$$

pero como este límite es la derivada, se llega a que

$$\frac{dy}{dx} = m_T = \tan \alpha$$

la cual, interpretada con palabras y conforme a lo que representa cada literal y símbolo en la figura 9.1, se puede decir que:

La derivada de una función $y = f(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva de dicha función, en el punto de coordenadas $P(x, y)$.

Puede visualizarse en <https://www.geogebra.org/m/HwQEu6HX>

Tómese en cuenta que las variables x e y que aparezcan en las derivadas de los siguientes ejemplos representan las coordenadas del punto de tangencia de la *recta tangente* a la curva de la función que se deriva $y = f(x)$.

Ejemplo 1: Calcular el ángulo de inclinación que forma la tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$.

Solución: Conviene graficar la función $y = x^2$ y su tangente para visualizar el problema. Dicha gráfica es la figura 9.2.

Aunque debe suponerse que el estudiante en estos momentos ya tiene conocimientos sobre las gráficas más elementales y la forma de graficarlas, la manera más simple de graficar es tabulando:

x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

En la figura 9.2 se muestra la tangente T a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$, así como el ángulo α que forma con el eje x . Dicho ángulo es el que se pide calcular.

Derivando $y = x^2$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Se dijo recientemente que las variables x e y que aparezcan en la derivada representan las coordenadas del punto de tangencia, de manera que en este caso, $x = 2$, $y = 4$, aunque en esta derivada no aparece la variable dependiente y . Entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4$$

y como la derivada es la tangente (trigonométrica) del ángulo que forma la recta tangente (geométrica) con la horizontal, se tiene que

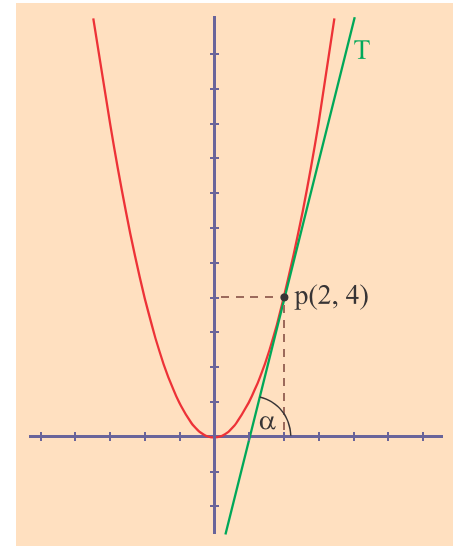


figura 9.2

$$4 = \tan \alpha$$

de donde

$$\alpha = \text{arc tan } 4$$

$$\alpha = 75.96$$

Ejemplo 2: Una recta tangente a la curva $y = x^2 - 4x + 6$ forma un ángulo de 50 grados con la horizontal. Encontrar las coordenadas del punto de tangencia $P(x, y)$.

Solución: Nuevamente conviene graficar para visualizar el enunciado del problema. La figura 9.3 lo muestra. La recta tangente **T** está formando un ángulo $\alpha = 50$ grados con la horizontal, se desea saber cuáles son las coordenadas del punto **P** en donde pega dicha recta con la parábola.

Derivando $y = x^2 - 4x + 6$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

y como la derivada es la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva, entonces

$$2x - 4 = \tan 50$$

$$2x - 4 = \tan 50$$

$$2x - 4 = 1.19175$$

$$2x = 1.19175 + 4$$

$$2x = 5.19175$$

$$x = \frac{5.19175}{2}$$

$$x = 2.59$$

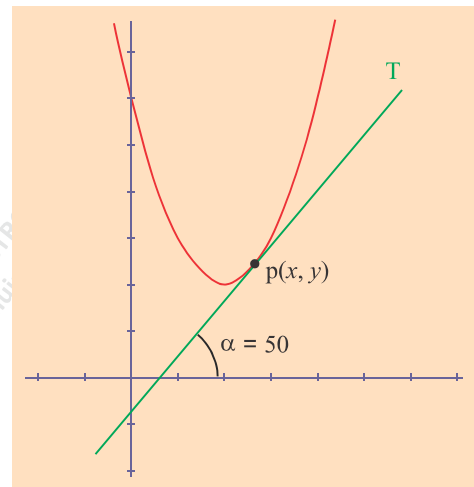


figura 9.3

Las variables x e ye que aparezcan en la derivada son las coordenadas del punto de tangencia, por lo tanto, sustituyendo en la ecuación de la parábola se obtiene el valor de su ordenada ye . Así que sustituyendo en $y = x^2 - 4x + 6$ el valor de $x = 2.59$ se obtiene:

$$y = (2.59)^2 - 4(2.59) + 6$$

$$y = 6.7081 - 10.36 + 6$$

$$y = 2.34$$

Las coordenadas del punto pedido son:

$$P(2.59 ; 2.34)$$

9.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Lo anterior lleva a una aplicación de la derivada muy interesante llamada *máximos y mínimos*. Se refiere a la forma de obtener los puntos máximos y mínimos de una función, lo cual tiene aplicaciones muy importantes como se verá más adelante.

Supóngase que la gráfica de cualquier función $y = f(x)$ es la curva mostrada en la figura 9.4. En ella, los puntos **A** y **E** se llaman *máximos*; los puntos **C** y **G** se llaman *mínimos*; y los puntos **B**, **D** y **F** se llaman *puntos de inflexión*.

No se puede definir un máximo como el punto más alto de la curva, pues obsérvese en la figura 9.4 que hay puntos en la rama derecha más altos que los puntos máximos **A** y **E**.

La definición formal no es parte de este curso.

La regla para obtener dichos puntos es la siguiente:

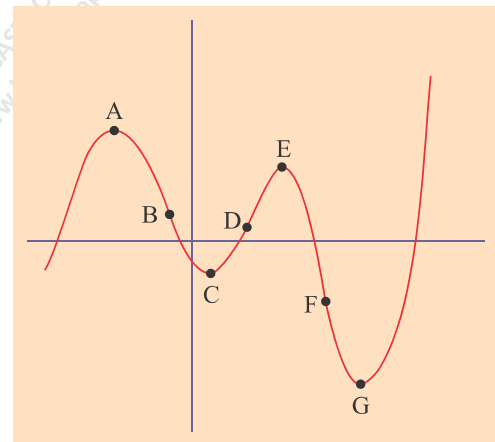


figura 9.4

Para calcular los máximos y/o mínimos de una función $f(x)$:

- 1) Se deriva la función $y = f(x)$ y se iguala a cero la derivada.
- 2) Se resuelve la ecuación resultante del paso anterior. Las raíces encontradas se llaman **valores críticos**.
- 3) Para deducir si es máximo o mínimo cada valor crítico se calcula la segunda derivada.
- 4) Se sustituye uno por uno cada valor crítico obtenido en el paso 2) en la segunda derivada.

*Si la segunda derivada resulta positiva significa que el valor crítico que se sustituyó en la segunda derivada es un **mínimo**.*

*Si la segunda derivada resulta negativa significa que el valor crítico que se sustituyó en la segunda derivada es un **máximo**.*

Ejemplo 1: Hallar los valores máximos y/o mínimos de la función $y = x^2 - 4x + 7$.

Solución: La gráfica de la función anterior es la parábola de la figura 9.5, en la cual se ve que tiene solamente un mínimo. Lo anterior deberá confirmarse aplicando el procedimiento.

Paso 1: Derivando la función e igualando a cero:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

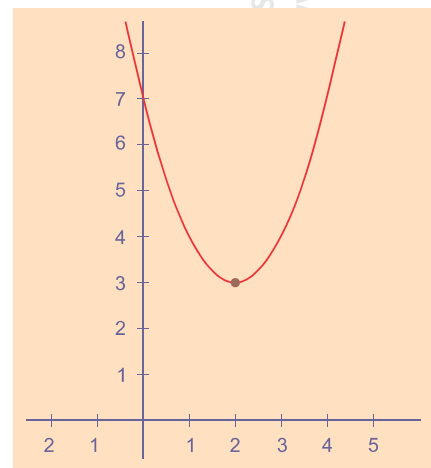


figura 9.5

$$2x - 4 = 0$$

Paso 2: Resolviendo $2x - 4 = 0$, se llega a que $x = 2$. Este es el *valor crítico*. En este momento se sabe que en $x = 2$ hay un máximo o un mínimo, pero no se sabe cuál de los dos.

Paso 3: Calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x - 4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

Como en este caso la segunda derivada no contiene a la variable x no es posible realizar el paso 4. Ya simplemente se deduce que como la segunda derivada es positiva, el valor crítico $x = 2$ es un mínimo.

Ejemplo 2: Investigar los máximos y mínimos de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

Solución:

Paso 1: Derivando e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Paso 2: Resolviendo la ecuación anterior:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

Se sabe en este momento que uno de esos dos puntos es un máximo y el otro es mínimo, pero no se sabe cuál es cada uno. Para investigarlo son los pasos siguientes.

Paso 3: Calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (3x^2 - 6x - 9)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

Paso 4: Sustituyendo el valor crítico $x_1 = 3$ en esta segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(3) - 6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12$$

como la segunda derivada resultó positiva con ese valor crítico significa que dicho valor crítico $x_1 = 3$ es un mínimo.

Sustituyendo ahora con el otro valor crítico $x_2 = -1$ en la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(-1) - 6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -12$$

como la segunda derivada resultó negativa con ese valor crítico significa que dicho valor crítico $x_1 = -1$ es un máximo.

Ejemplo 3: Obtener los máximos y/o mínimos de la función $y = 3x^4 - 22x^3 - 150x^2 + 1650x + 6$.

Solución:

Paso 1: Derivando e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 66x^2 - 300x + 1650$$

$$12x^3 - 66x^2 - 300x + 1650 = 0$$

Paso 2: Resolviendo la ecuación anterior:

$$12x^3 - 66x^2 - 300x + 1650 = 0$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 5.5$$

$$x_3 = 5$$

Se sabe en este momento que esos puntos o son máximos o son mínimos, pero no se sabe cuál es cada uno. Para investigarlo son los pasos siguientes.

Paso 3: Calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (12x^3 - 66x^2 - 300x + 1650)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 132x - 300$$

Paso 4: Sustituyendo el valor crítico $x_1 = -5$ en esta segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36(-5)^2 - 132(-5) - 300$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1260$$

como la segunda derivada resultó positiva significa que dicho valor crítico $x_1 = -5$ es un mínimo.

Sustituyendo ahora el valor crítico $x_2 = 5.5$ en esta segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36(5.5)^2 - 132(5.5) - 300$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 63$$

como la segunda derivada resultó positiva significa que dicho valor crítico $x_2 = 5.5$ es un mínimo.

Finalmente, sustituyendo el valor crítico $x_3 = 5$ en esta segunda derivada:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 36(5)^2 - 132(5) - 300$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -60$$

como la segunda derivada resultó negativa significa que dicho valor crítico $x_3 = 5$ es un máximo.

EJERCICIO 9.1

Obtener los valores máximos y/o mínimos de las funciones

1) $y = 5x^2 + 10x - 9$

3) $y = 8x^2 - 8x + 1$

5) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 24$

7) $y = 2x^3 + 15x^2 - 84x - 18$

9) $y = 4x^3 - 7x^2 - 6x + 2$

2) $y = 7x^2 + 14x - 9$

4) $y = 6x^2 - 24x - 9$

6) $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 3$

8) $y = 4x^3 - 27x^2 + 24x + 30$

10) $y = 8x^3 - 17x^2 + 12x + 14$

9.3 APLICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Existen muchos problemas del mundo real cuyas diferentes posibles soluciones van primero creciendo y luego decreciendo o a la inversa, lo que implica que tienen un valor máximo o un valor mínimo, los cuales no pueden encontrados por métodos algebraicos, sino solamente con la aplicación del cálculo diferencial.

La parte medular de la solución de estos problemas consiste en saber construir una función que describa el comportamiento del fenómeno enunciado. Una vez construida dicha función, simplemente se le aplica el procedimiento de encontrarle sus máximos y/o mínimos.

Ejemplo 1: Un problema clásico es el de la cajita. Se desea construir una caja sin tapa, de base cuadrangular, a partir de una lámina cuadrada de 60 unidades de longitud de lado, recortando cuadrados de sus esquinas y doblando las pestañas sobrantes para que sean su altura. Calcular las dimensiones de la caja de **mayor volumen**. La figura 9.6 muestra la idea.

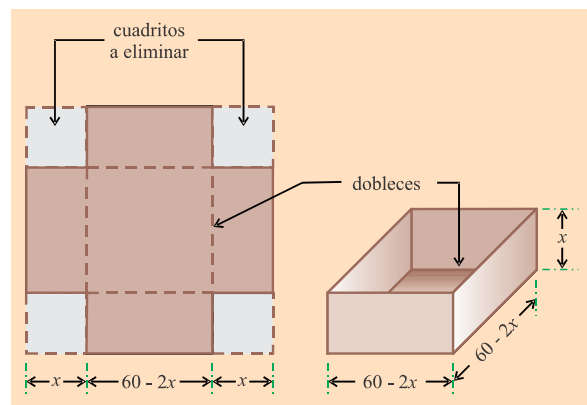


figura 9.6

Solución: La lámina entera está a la izquierda con los dobleces que se le han de hacer y los cuadritos en las esquinas que deben eliminarse. A la derecha aparece la cajita ya construida.

Sea x la longitud del cuadrito a eliminarse, por lo tanto la longitud restante que será realmente lo largo y ancho de la cajita es de $60 - 2x$.

Antes de resolver el problema conviene hacer una pequeña tabla para mostrar que con diferentes valores del cuadrito a eliminar de lado x , que es lo mismo que la altura de la caja, se obtienen volúmenes diferentes. O sea, si la altura de la caja es, por ejemplo, $x = 1$, las otras dimensiones son de 58×58 y su volumen es de $V = 1 \times 58 \times 58 = 3364$.

x	1	2	4	9	11	15	20
largo y ancho	58	56	52	42	38	30	20
volumen	3 364	6 272	10 816	15 876	15 884	13 500	8 000



va aumentando



va disminuyendo

Puede verse en la tabla que el volumen va aumentando hasta cierto valor y luego comienza a descender, lo que significa que hay algún volumen que es más grande que los demás, o sea que es máximo. No puede afirmarse a la ligera que el volumen máximo es $V = 15\,884$ correspondiente a las dimensiones $11 \times 38 \times 38$ simplemente porque ese es el que se ve en la tabla, pues bien podría ser que antes de $x = 11$ y después de $x = 9$ se haya logrado el máximo y que al pasar por $x = 11$ ya venga en descenso. O también podría ser posible que después de $x = 11$ siga creciendo el volumen y luego al descender (entre $x = 11$ y $x = 15$) se llegó a $V = 13\,500$ cuando $x = 15$, según la tabla.

Tampoco tendría validez completar la tabla con los valores de $x = 10$; $x = 12$; $x = 13$ y $x = 14$ para analizar la tabla y sacar una conclusión, pues de entrada nada garantiza que el máximo se obtenga para un valor entero de x , sino para un valor decimal. La única manera certera de obtener el valor de x para el cual el volumen es máximo es aplicando el procedimiento de máximos y/o mínimos del cálculo diferencial.

El volumen de la cajita es

$$\begin{aligned} V &= x(60 - 2x)(60 - 2x) \\ &= x(3600 - 240x + 4x^2) \end{aligned}$$

$$V = 3600x - 240x^2 + 4x^3$$

Esta es la función que describe el comportamiento del enunciado, por lo tanto es la que debe derivarse y aplicarle todo el procedimiento de máximos y/o mínimos:

$$\frac{dV}{dx} = 3600 - 480x + 12x^2$$

igualando a cero y resolviendo:

$$12x^2 - 480x + 3\,600 = 0$$

de donde los valores críticos que se obtienen son

$$x_1 = 30$$

$$x_2 = 10$$

¿Cuál de ambos valores es máximo y cuál es mínimo? Para investigarlo se puede recurrir al proceso general, pero a veces, como en este ejemplo, se puede deducir por lógica. Recordando que x representa la altura de la cajita, es decir, la longitud del cuadrado a eliminarse, si ésta mide 30, al quitar por cada esquina cuadrillos de 30, ¿cuánta lámina queda para hacer la cajita? ¡Nada! Significa que en $x = 30$ hay un mínimo. Por lo tanto, en $x = 10$ hay un máximo.

De hecho, conviene siempre que se va a resolver un problema de máximos y/o mínimos localizar los valores frontera de la variable independiente. En este caso, los valores frontera de x son, por un extremo $x = 0$, ya que así la caja carece de altura y su volumen es cero; el otro es $x = 30$ porque así se elimina toda la lámina y no queda nada para construir la caja, por lo tanto su volumen es cero. Como no puede haber dos mínimos seguidos sin que haya al menos un máximo en medio, el valor crítico obtenido de $x = 10$ debe ser máximo.

Las dimensiones de la cajita han de ser $10 \times 40 \times 40$ y el volumen máximo que se puede obtener es de

$$V = 10 \times 40 \times 40$$

$$V = 16000$$

Ejemplo 2: Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por tres de sus lados, ya que el cuarto lado estará limitado por el cause de un río. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?

Solución: Sea x la altura del rectángulo (ver figura 9.7); por lo tanto, la base será $875 - 2x$ y la superficie del terreno será

$$S = x (875 - 2x)$$

$$S = 875x - 2x^2$$

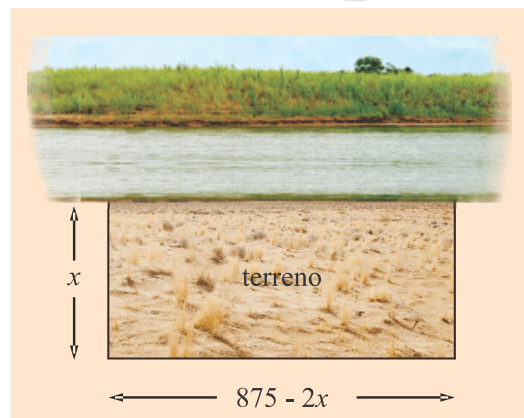


figura 9.7

Esta es la función a la que debe aplicarse el procedimiento de máximos y/o mínimos. Entonces derivándola:

$$\frac{dS}{dx} = 875 - 4x$$

igualando a cero y resolviendo:

$$875 - 4x = 0$$

$$-4x = -875$$

$$x = \frac{-875}{-4}$$

$$x = 218.75$$

Este es el valor crítico. Por lógica se deduce que cuando $x = 0$ o bien cuando $x = 437.5$ se obtiene la superficie mínima que es cero (son los valores frontera de la variable x), porque en realidad se construye una línea recta doble.

Por lo tanto, con $x = 218.75$ se obtiene el máximo.

Las dimensiones del terreno deben ser

$$x \times (875 - 2x)$$

$$218.75 \times (875 - 437.5)$$

$$218.75 \times 437.5$$

Ejemplo 3: Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por sus cuatro lados. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?

Solución: A diferencia del ejemplo anterior, ahora va a cercarse el terreno por sus cuatro lados.

Sea x la altura del rectángulo; por lo tanto, la base será $\frac{875 - 2x}{2}$ (ver figura 9.8) y la superficie del terreno será

$$S = (x) \left(\frac{875 - 2x}{2} \right)$$

$$S = \frac{875x - 2x^2}{2}$$

que es la función a derivar:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} (875 - 4x)$$

igualando a cero y resolviendo la ecuación resultante:

$$\frac{1}{2} (875 - 4x) = 0$$

$$875 - 4x = 0$$

$$4x = 875$$

$$x = 218.75$$

Este es el valor crítico. Los valores frontera de la variable x son $x = 0$ y $x = 437.5$ porque dicha variable no puede valer menos que cero ni más que 437.5. Nuevamente se deduce por lógica que este valor crítico es un valor máximo, ya que cuando $x = 0$ o bien cuando $x = 437.5$ el área abarcada es mínima (igual a cero). Por lo tanto, el cuadrado es el de mayor área en virtud de que los cuatro lados deben medir 218.75.

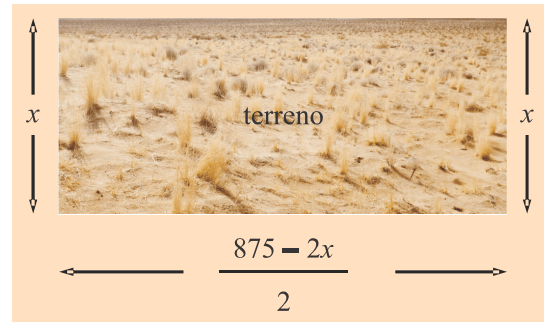


figura 9.8

Ejemplo 4: En un terreno fangoso rectangular que mide 5 km de ancho por 8 km de largo se tiene que comunicar el punto A con el punto B por medio de una carretera, como lo muestra la figura 9.9. La carretera debe atravesar desde el punto A hasta cierto punto P situado en el lado contrario; y luego desde P hasta B debe trazarse la carretera paralelamente al terreno fangoso, pero ya por tierra firme. El costo a través del terreno fangoso es de 10 millones de pesos el kilómetro mientras que por tierra firme es de 7

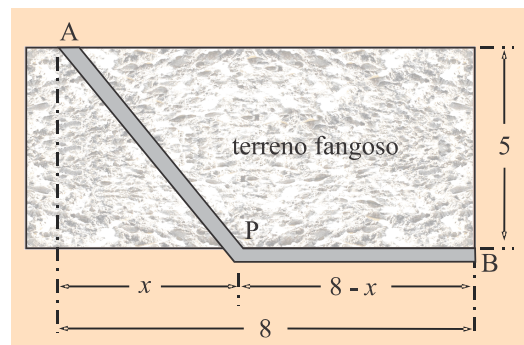


figura 9.9

millones de pesos el kilómetro. Calcular las distancias **AP** por terreno fangoso y **PB** por tierra firme tales que el costo total de la carretera sea el mínimo.

Solución: Sea x la ubicación del punto **P** respecto del vértice inferior izquierdo del terreno fangoso (ver figura 9.9). Por lo tanto, el resto **PB** debe ser $(8 - x)$. Obsérvese que los valores frontera para la variable x son $x = 0$ y $x = 8$, es decir, $0 < x < 8$.

Conforme a la figura 9.9, la distancia **AP** se puede obtener por el teorema de Pitágoras:

$$AP = \sqrt{5^2 + x^2}$$

$$PB = \sqrt{25 + x^2}$$

El costo total C de la carretera es el costo unitario (por kilómetro) de cada tramo por su longitud, es decir

$$C = 10\sqrt{25 + x^2} + 7(8 - x) \quad (4.1)$$

Antes de calcular el costo mínimo, es saludable hacer una tabla de los diferentes costos según sea la ubicación del punto **P** para visualizar la variación de dichos costos. En la tabla los costos están en millones de pesos. Para obtener el costo total de la carretera dependiendo del valor dado a x simplemente hay que sustituir en la fórmula del costo (4.1):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
costo	106	9999	9585	9330	9203	9171	9210	9302	9433

Puede verse en la tabla que los costos van disminuyendo y aparentemente el mínimo se obtiene cuando $x = 5$. Los cálculos siguientes demostrarán que no debe guiarse uno por la apariencia.

Derivando la fórmula del costo (4.1):

$$\frac{dC}{dx} = \frac{10(2x)}{2\sqrt{25 + x^2}} - 7$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{10x}{\sqrt{25 + x^2}} - 7$$

Igualando a cero y resolviendo la ecuación resultante:

$$\frac{10x}{\sqrt{25+x^2}} - 7 = 0$$

multiplicando ambos miembros de la igualdad por $\sqrt{25+x^2}$ para eliminar el denominador:

$$\sqrt{25+x^2} \left(\frac{10x}{\sqrt{25+x^2}} \right) - 7(\sqrt{25+x^2}) = 0(\sqrt{25+x^2})$$

$$10x - 7\sqrt{25+x^2} = 0$$

$$10x = 7\sqrt{25+x^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(10x)^2 = (7\sqrt{25+x^2})^2$$

$$100x^2 = 49(25+x^2)$$

$$100x^2 = 49x^2 + 1225$$

$$100x^2 - 49x^2 = 1225$$

$$51x^2 = 1225$$

$$x^2 = \frac{1225}{51}$$

$$x^2 = 24.0196$$

$$x = \pm 4.90098$$

Como el valor crítico negativo no tiene sentido porque x representa una longitud (ver figura), entonces $x = 4.9008$ es el mínimo. Y como se dijo al inicio, el hecho de que en la tabla haya aparecido el valor de $x = 5$ como el mínimo no significa que este valor lo sea realmente.

El costo mínimo se puede obtener sustituyendo $x = 4.9008$ en (4.1):

$$C = 10\sqrt{25 + 4.9008^2} + 7(8 - 4.9008)$$

Recuérdese que el 10 antes del radical indica diez millones pesos, que es el costo por km en el terreno fangoso; y que el 7 antes del paréntesis indica siete millones de pesos, que es el costo por km en terreno firme. Por lo tanto, la unidad de costo es de millón de pesos. Continuando las operaciones anteriores:

$$C = 10\sqrt{49.0178} + 7(3.0992)$$

$$C = 91.70711313$$

El costo mínimo es de \$91 707 113.13

Ejemplo 5: Se deben construir envases cilíndricos para bebida con capacidad de 300 cm^3 . Calcular las dimensiones que deben tener para que su costo sea el mínimo (figura 9.10).

Solución: El costo de cada envase depende del material que se lleve; por lo tanto, el de costo mínimo será el que tenga menor superficie.

Supóngase que los envases tienen forma cilíndrica recta de espesor uniforme, con altura h y radio r . Su superficie es igual al área de la figura 9.11, en donde la base del rectángulo es igual al perímetro p de la circunferencia de la tapa.

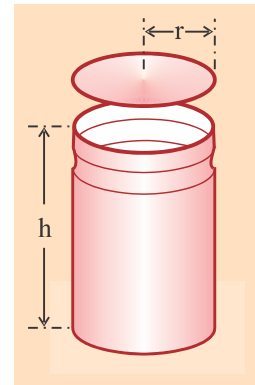


figura 9.10

El área de dicha superficie (figura 9.11) es el área de dos círculos iguales de radio r más la del rectángulo:

$$A = 2\pi r^2 + ph \quad (5.1)$$

en donde el perímetro p es igual a $p = 2\pi r$, por lo tanto, sustituyendo en la igualdad (5.1):

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (5.2)$$

por otra parte, el volumen del envase es el área del círculo de una de las tapas por la altura del cilindro:

$$300 = \pi r^2 h$$

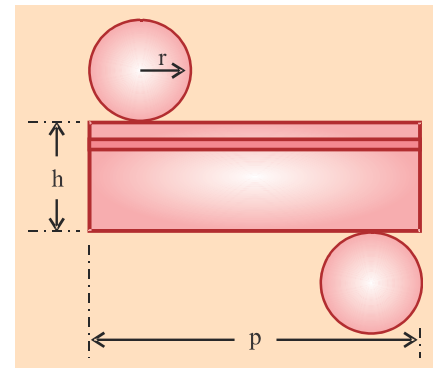


figura 9.11

de donde

$$h = \frac{300}{\pi r^2} \quad (5.3)$$

sustituyendo el valor de h de (5.3) en (5.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{300}{\pi r^2} \right) \\ A &= 2\pi r^2 + \frac{600\cancel{\pi}r}{\cancel{\pi}r^2} \\ A &= 2\pi r^2 + \frac{600}{r} \end{aligned} \quad (5.4)$$

que es la función a derivar para obtener el máximo y/o mínimo respecto del radio r . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 2\pi \frac{d}{dr} r^2 + 600 \frac{d}{dr} r^{-1} \\ \frac{dA}{dr} &= 4\pi r - \frac{600}{r^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

igualando a cero y resolviendo:

$$4\pi r - \frac{600}{r^2} = 0$$

multiplicando toda la igualdad por r^2 para eliminar denominadores:

$$4\pi r^3 - 600 = 0$$

$$r^3 = \frac{600}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{600}{4\pi}}$$

$$r = 3.627 \quad (5.6)$$

y aplicando la regla general para saber si este valor crítico es máximo o mínimo, es decir, con el criterio de la segunda derivada, se deduce que el área mínima se obtiene cuando el radio es $r = 3.627$.

La altura del envase con superficie mínima se obtiene sustituyendo el valor del radio r en la igualdad (5.3):

$$h = \frac{300}{\pi r^2}$$

$$h = \frac{300}{\pi (3.627)^2}$$

$$h = 7.258 \text{ cm}$$

Las dimensiones del envase cilíndrico más económico que pueda contener 300 cm^3 de volumen son de $r = 3.627$ cm y altura $h = 7.258$ cm.

Ejemplo 6: Una agencia de publicidad cobra por centímetro cuadrado del área total empleada o tamaño del papel (área cobrable), lo que incluye el área imprimible más dos márgenes de 2 cm a la izquierda y a la derecha y dos de 3 cm arriba y abajo (figura 9.12). Un cliente necesita mandar hacer una publicidad que tenga 480 cm^2 de área impresa. Calcular las dimensiones que debe tener el papel o región cobrable para que el costo sea mínimo.

Solución: Como la empresa cobra por el área total utilizada, incluidos los márgenes, el costo será mínimo cuando dicha área sea mínima.

Sea x la base del rectángulo del área imprimible. Por lo tanto, como dicha área (base por altura) debe ser de 480 cm^2 , la altura es

$$\text{altura} = \frac{480}{x} \quad (6.1)$$

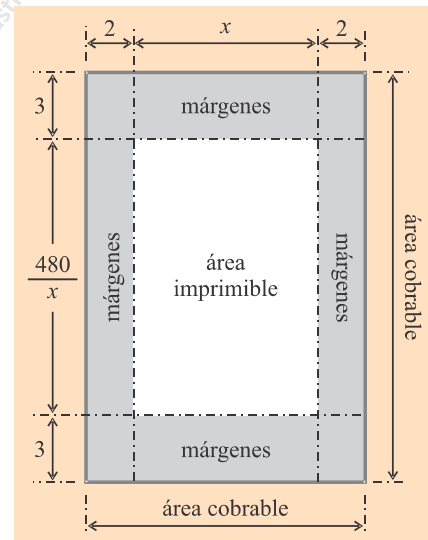


figura 9.12

Entonces el área cobrable es un rectángulo cuyas dimensiones son $(x + 4)$ de base (ver figura 9.12) por $\left(\frac{480}{x} + 6\right)$ de altura, es decir, el área cobrable es

$$A_c = (x + 4) \left(\frac{480}{x} + 6 \right) \quad (6.2)$$

Por ejemplo, si $x = 2$, las dimensiones del área imprimible son de $2 \times 240 = 480 \text{ cm}^2$. Sin embargo, las dimensiones del área cobrable, aumentando los márgenes, son de $6 \times 246 = 1476 \text{ cm}^2$, dimensiones que se obtienen sumándole 4 cm (dos de cada lado de márgenes) a $x = 2$ y sumándole 6 cm (tres de cada lado de márgenes) a la altura. O bien, de una manera más simple, basta sustituir $x = 2$ en la igualdad (6.2).

La siguiente tabla muestra cómo el costo es diferente para diferentes medidas de la publicidad, siempre y cuando el área imprimible tenga 480 cm^2 . Para obtener los valores correspondientes a la tercera fila (A_c = área cobrable), basta sustituir el valor de x en la igualdad (6.2).

x (cm)	4	6	8	10	12	16	20	24	30	40
altura (cm)	120	80	60	48	40	30	24	20	16	12
\$ A_c	1008	860	792	756	736	720	720	728	748	792

Se ve que el área cobrable mínima está entre $x = 16$ y $x = 20$. Si se multiplica el valor de x por el correspondiente de su altura siempre da 480 cm^2 . No confundir el área imprimible (que siempre ha de ser 480 cm^2) con el área cobrable que incluye los márgenes obligatorios.

Para obtener el valor de x para el que el área cobrable A_c sea mínima se deriva la igualdad (6.2) con la fórmula del producto uv :

$$\frac{dA_c}{dx} = (x + 4) \left(-\frac{480}{x^2} \right) + \left(\frac{480}{x} + 6 \right) (1)$$

$$\frac{dA_c}{dx} = \left[-\frac{480(x + 4)}{x^2} \right] + \left(\frac{480}{x} + 6 \right)$$

Solución: Sean x el ancho y y la longitud del cercado total. Como se disponen de 270 metros de alambrada y se van a emplear tres secciones de longitud x y dos de longitud y , entonces se necesitarán $3x + 2y = 270$ metros, de donde

$$3x + 2y = 270$$

$$y = 135 - \frac{3x}{2} \quad (7.1)$$

El área total es

$$A = xy = x \left(135 - \frac{3x}{2} \right)$$

$$A = 135x - \frac{3x^2}{2} \quad (7.2)$$

derivando (7.2):

$$\frac{dA}{dx} = 135 - 3x \quad (7.3)$$

igualando a cero y resolviendo la ecuación que resulta:

$$135 - 3x = 0$$

$$x = 45 \quad (7.4)$$

Considerando que los valores frontera de la variable x son $x = 0$ y $x = 90$ en los cuales el área abarcada es cero, o sea mínima, tiene que existir un máximo entre 0 y 90. Ese es el valor crítico calculado de $x = 45$. Sustituyendo (7.4) en (7.1) para obtener el valor de la base y , se obtiene que

$$y = 135 - \frac{3(45)}{2}$$

$$y = 67.5$$

Las dimensiones de los dos corrales deben ser de 45×67.5 metros, que dan el área máxima de 3037.5.

EJERCICIO 9.2

- 1) De todos los cilindros rectos sin tapas inscritos en una esfera de 10 unidades de longitud de radio, obtener las dimensiones del que tiene **mayor superficie**. Ver figura 9.14.

Sugerencia: La superficie de un cilindro sin tapas es la del rectángulo que se obtiene al desenrollar la parte recta, el cual tiene de base el perímetro de la circunferencia que forma su tapa.

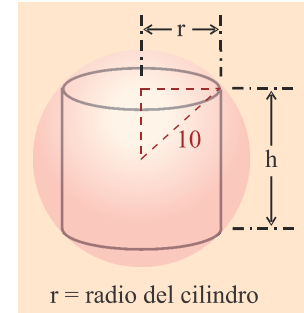


figura 9.14

- 2) De todos los paralelepípedos de base cuadrada inscritos en un cono circular recto de 72 unidades de longitud de altura por 24 de radio, obtener las dimensiones del de **mayor volumen** (figura 9.15).

Sugerencia: El volumen del paralelepípedo es igual al área de la base por su altura. La cara superior, paralela al cuadrado que forma su base toca al cono con sus cuatro vértices. Se pueden construir dos triángulos rectángulos semejantes: uno, que tenga por cateto vertical la altura del cono y por cateto horizontal el radio de la base del cono; el otro triángulo que quede interno al anterior, que tenga por cateto horizontal a la recta que une el centro del cuadrado superior con uno de sus vértices que tocan al cono.

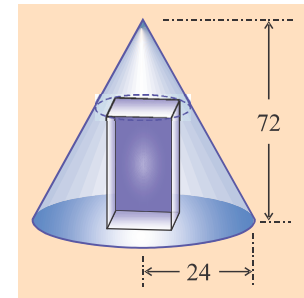


figura 9.15

- 3) Con 7200 metros de alambrada, se desea cercar un terreno rectangular. Si uno de los lados es un río y solamente los otros tres lados deben cercarse, hallar las dimensiones que deben darse para abarcar la **mayor área posible**.
- 4) Con 7200 metros de alambrada, se desea cercar un terreno rectangular. Hallar las dimensiones que deben darse para abarcar la **mayor área posible**.
- 5) Hallar el de **área máxima** de todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio $r = 144$ (ver figura 9.16). Dos vértices del rectángulo deben estar sobre el diámetro.

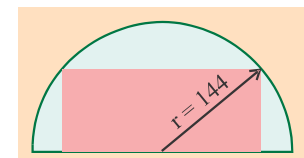


figura 9.16

Sugerencia: Si se traza una recta que una el centro de la semicircunferencia con uno de los vértices superiores del rectángulo se forma un triángulo rectángulo interior al mismo rectángulo cuya hipotenusa es el radio de la semicircunferencia. El rectángulo pedido realmente está formado por cuatro triángulos rectángulos iguales al anterior.

- 6) De todos los rectángulos inscritos en un triángulo equilátero (figura 9.17) cuyo lado mide $l = 105$, hallar el de área máxima. Dos vértices del rectángulo deben estar sobre uno de los lados.

Sugerencia: La altura del triángulo equilátero lo divide en dos triángulos rectángulos iguales cuyos catetos horizontales miden la mitad del lado original. Uno de esos triángulos rectángulos es semejante al triángulo que queda adentro de él y que está situado afuera del rectángulo a su derecha y en la parte inferior de todo el triángulo equilátero.

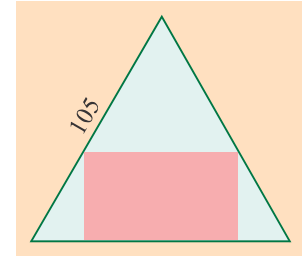


figura 9.17

- 7) Una persona está en el punto A y debe trasladarse hasta el punto C (ver figura 9.18). Cuando viaja desde A hasta cualquier punto P del tramo BC lo hace con una velocidad $V_1 = 60$ km/h y cuando viaja desde P hasta C lo hace con velocidad $V_2 = 130$ km/h. Hallar la ubicación del punto P al que debe llegar el viajero proveniente de A para hacer el mínimo tiempo desde A hasta C .

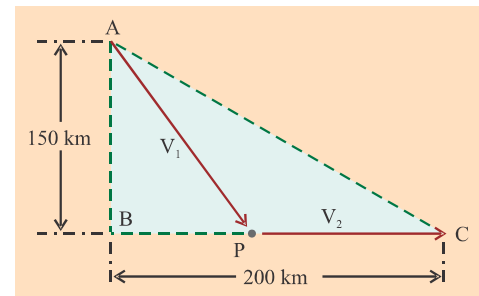


figura 9.18

- 8) Una lámina de 420 cm de ancho debe doblarse por sus extremos en ángulos rectos para trasportar agua, formando el canal que se muestra en la figura 9.19. Calcular las dimensiones que deben darse a los dobleces para que la capacidad de transporte sea máxima.

Sugerencia: El largo de la lámina no influye. La capacidad del transporte de agua tiene que ver con el área del corte transversal de la canal, o sea con el área del rectángulo formado por el perfil de los dos dobleces y el perfil de la parte inferior. Las dos alturas de los dobleces más la longitud de la base inferior de la canal son los 420 cm del ancho de la lámina.

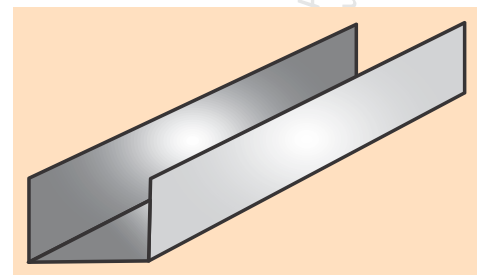


figura 9.19

- 9) Se desea construir una ventana que tenga 15 unidades de perímetro, cuya forma sea un rectángulo y un semicírculo sobre su parte superior (ver figura 9.20). Calcular las dimensiones que debe tener para que permita el máximo paso de luz.

Sugerencia: La semicircunferencia superior depende de las dimensiones del rectángulo, ya que su diámetro es la base de dicho rectángulo. El paso de la luz depende del área clara de la figura 9.20.

- 10) En el problema anterior, en vez de aumentarle un semicírculo por la parte superior del rectángulo, se le quita. Su perímetro sigue siendo de 15 unidades. Calcular las dimensiones que debe tener para que permita **el máximo paso de luz**. Ver figura 9.21.

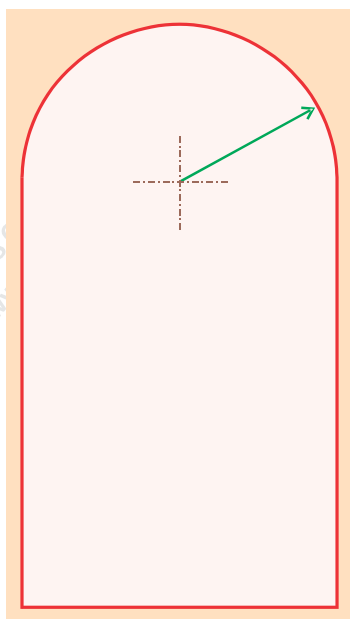


figura 9.20

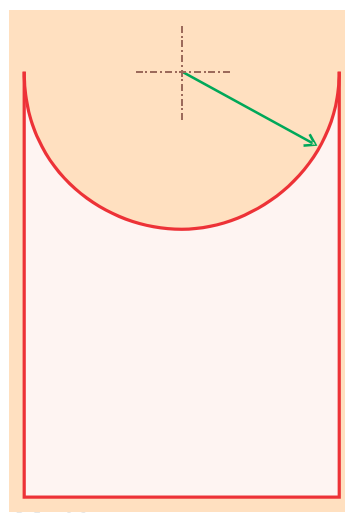


figura 9.21